קבוצות יחידות ומשפט Salem-Zygmund

הרצאה במסגרת קורס "מבוא לאנליזה הרמונית", 2012-07-12. נכתב ע"י יוני רוזנשיין.

תוכן עניינים

[מבוא 1](#_Toc329794568)

[פרק א': יחידות מקדמי טור טריגונומטרי, וסיפורו של קנטור 2](#_Toc329794569)

[פרק ב': משפט Salem-Zygmund 5](#_Toc329794570)

[1. מספרי Pisot-Vijayaraghavan 5](#_Toc329794571)

[2. בניית קבוצת קנטור מוכללת 9](#_Toc329794572)

[3. משפט Salem-Zygmund 10](#_Toc329794573)

[הכיוון הראשון 10](#_Toc329794574)

[הכיוון השני 12](#_Toc329794575)

[ביבליוגרפיה 15](#_Toc329794576)

# מבוא

נתבונן בטור פונקציות טריגונומטריות המתכנס בכל מקום. האם המקדמים נקבעים באופן יחיד ע"י פונקציית הגבול? קנטור הצעיר קיבל את השאלה הקשה הזו כמשימה, והצליח לענות עליה בחיוב ב-1870. מה קורה, הוא תהה אז, אם ידוע שהטור מתכנס **"פחות מבכל מקום"**? קנטור שיפר את תוצאתו הקודמת, אבל תוך כך, סתר אמונה רווחת - הוא הסיק באופן פרדוקסלי שהקטע [0, 1] לא יכול להיות בן-מניה! זו היתה המוטיבציה שלו להמצאת תורת הקבוצות המודרנית.  
  
בעיית הסיווג של עד-כמה "פחות מבכל מקום" ההתכנסות יכולה להיות, כך שעדיין מובטחת יחידות, פתוחה עד היום. ב-1916, באופן מפתיע, הוכח שהתכנסות כמעט בכל מקום **אינה** מבטיחה יחידות. ב-1955, פריצת דרך נוספת הושגה: בנייה מוכללת של קבוצת קנטור (עם יחס שונה מהשליש הקלאסי) הוכחה ע"י Salem ו-Zygmund כמבטיחה או לא מבטיחה יחידות, כתלות בתכונות **אריתמטיות** של היחס שבעזרתו נבנתה הקבוצה. תגלית זו שופכת מעט אור על מורכבות בעיית הסיווג.  
  
בהרצאה שלי, נעקוב במהירות אחרי המקור של נפילתו של קנטור לאי-שפיות, ואז נתמקד בניתוח קבוצות יחידות, ובתקווה נוכיח (לפחות חלקית) את משפט Salem-Zygmund.

ידע קודם נדרש: ההרצאה תהיה ברמת תואר שני (כלומר לבוגרי תואר ראשון); מבחינת התחום של אנליזה הרמונית מתקדמת, היא תהיה הרצאת מבוא, ידידותית לחדשים בתחום. כדאי להכיר קצת אנליזת פורייה, קצת תורת גלואה, קצת טופולוגיה וקצת את קבוצת קנטור (הפשוטה).

# פרק א': יחידות מקדמי טור טריגונומטרי, וסיפורו של קנטור

בהינתן פונקציה , כאשר  הוא "המעגל", ניתן להתבונן בטור פורייה שלה:



טור פורייה הוא "יצור פורמלי". בתור טור, לא ברור האם הוא בכלל מתכנס באיזושהי נקודה, ובנקודות ההתכנסות – האם הוא מתכנס לערך . לפעמים זה נכון ולפעמים לא – נכנסים לעומק סוגיה זו בקורס "אנליזה הרמונית".

אנו נתעניין בבעיית **היחידות** של טור הרמוני מתכנס. כלומר, נניח שהטור  מתכנס לכל  לפונקציה . האם מקדמי הטור נקבעים מכאן ביחידות?

כלומר, אם הטור  מתכנס לכל  לאותה פונקציה , האם  לכל ?

ע"י חיסור שני האגפים, מגיעים לניסוח שקול אך פשוט יותר של אותה השאלה: אם מתקיים



האם בהכרח ?

**הערה להבנת השאלה.** אנו הראינו בקורס שאם , וכל מקדמי פורייה שלה מתאפסים, אז בהכרח . כלומר, טרנספורם פורייה הוא חח"ע ב-. זה מעין כיוון הפוך לשאלה זו. השאלה הזו הרבה יותר קשה, ובה אנו מתבוננים במקדמים שאינם בהכרח (ובהכרח אינם) מקדמי פורייה!

במאה ה-19, זו היתה בעיה פתוחה קשה, אשר לא נפתרה ע"י אנליסטים דגולים: רימן, ליפשיץ, דיריכלה והיינה. היינה (שהיה אז רקטור אוניברסיטה) הציע לקנטור (הצעיר) להתעסק בבעיה. קנטור היה בן 24 ועדיין לא התעסק עם תורת הקבוצות, אבל כבר פרסם 10 מאמרים, בעיקר בתורת המספרים (נושא הדוקטורט שלו).

**משפט היחידות של קנטור (1870): כן.**

נעקוב אחרי ההוכחה של משפט היחידות מבלי להוכיח את הפרטים הטכניים. נשים לב שההוכחה משתמשת בשני כלים חשובים שרק באותה עת הומצאו: התכנסות במידה שווה ואינטגרציה איבר-איבר.

**קווים כלליים להוכחה.**

דבר ראשון אפשר להראות ש-. (זו למת קנטור-לבג; היא מזכירה את למת רימן-לבג...)

בפרט, הסדרה  חסומה. כעת מגדירים את **פונקציית רימן:**



הטור מתכנס במידה שווה לפי מבחן- של ויירשטראס, ובפרט זו פונקציה רציפה.

נגדיר את **נגזרת שוורץ השניה** שלה כך:



(בנקודות בהן  גזירה פעמיים, ברור ש-. אך יתכן ש- גזירה פעמיים לפי שוורץ ולא במובן הרגיל.)

**הלמה הראשונה של רימן:** אם  סדרה חסומה ו- לכל , אז  לפי ההגדרה לעיל גזירה פעמיים לפי שוורץ ומתקיים .

מהלמה הראשונה של רימן נקבל, במקרה שלנו: .

**למת שוורץ:** אם  רציפה בקטע פתוח ו- בקטע, אז  לינארית בקטע.

מלמת שוורץ נקבל:



ע"י בחירת  וחיסור, נקבל . ע"י בחירת  וחיסור, נקבל . נותר לנו:



וההתכנסות היא במידה שווה. ע"י הכפלה ב- ואינטגרציה איבר-איבר נקבל  לכל .

**מש"ל.**

במשך מספר השנים הבאות, קנטור התעסק בהכללה של הבעיה:

**הגדרה (קבוצת יחידות).**

* קבוצה  תיקרא קבוצת יחידות (set of uniqueness, U-set) אם בהינתן



בהכרח .

* קבוצה  שאינה קבוצת יחידות תיקרא קבוצת ריבוי (set of multiplicity, M-set).

**בעיה (פתוחה עד היום).** מהן קבוצות היחידות?

**דוגמאות פשוטות.**

*  היא קבוצת יחידות (משפט היחידות של קנטור).
*  אינה קבוצת יחידות.

התחושה היא שקבוצת יחידות צריכה להיות "רזה". הטענה הבאה מחזקת את התחושה:

**טענה פשוטה.**

אם  קבוצת יחידות מדידה (לפי מידת לבג ), אז היא ממידה אפס.

**הוכחה.**

ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות ש- סגורה (אם  ממידה אפס אז ממילא סיימנו, ואם  ממידה חיובית אז מכיוון שמידת לבג רגולרית-פנימית, יש תת-קבוצה סגורה ממידה חיובית).

תהי  פונקציית האינדיקטור של  ב-. ברור ש- ולכן יש לה טור פורייה, . מכיוון ש- פתוחה, מעקרון הלוקאליזציה של רימן נקבל:



אבל  קבוצת יחידות, לכן . ובפרט:



**מש"ל.**

**הערה.** לקבוצות לא מדידות המצב מסובך יותר. למשל, ידוע (בעזרת אקסיומת הבחירה, כמובן) שניתן לבנות קבוצת יחידות שהמשלים שלה הוא גם קבוצת יחידות!

**הכללה ("קריטריון Rajchman" – כנראה לא השם הרשמי...).** תהי  מידת Rajchman: מידת בורל חיובית על  המקיימת . אזי לכל קבוצת יחידות סגורה , מתקיים .

**משפט (Menshov, 1916).**

הכיוון ההפוך לא נכון:

קיימת קבוצת Menshov, כלומר קבוצה ממידה (לבג) אפס שאינה קבוצת יחידות.

במילים אחרות: קיים טור פונקציות טריגונומטריות לא טריוויאלי המתכנס כמעט בכל מקום לאפס.

(משפט Salem-Zygmund, שאותו נוכיח בסוף ההרצאה, נותן דוגמה (למעשה אינסוף דוגמאות) המוכיחה את משפט Menshov, אבל זו כמובן לא תהיה הדוגמה המקורית של Menshov.)

**הכללות של קנטור של משפט היחידות (1871-1872).**

* תת-סדרה עולה של  היא קבוצת יחידות. בפרסום זה הוא הודיע מראש:

"This extension of the theorem is by no means the last; I have succeeded in finding an equally rigorous but much broader extension which I shall communicate when I have an opportunity to do so."

* אם יש מספר  עבורו ל- אין נגזרת מסדר , אזי  היא קבוצת יחידות.

(עבור קבוצה אינסופית , הנגזרת של  מוגדרת כקבוצת נקודות ההצטברות שלה. קבוצה גזירה מספר סופי של פעמים אם אחרי מספר סופי של נגזרות, מקבלים קבוצה סופית.)

* אם יש סודר  עבורו ל- אין נגזרת מסדר , אזי  היא קבוצת יחידות.

(המספרים הסודרים הומצאו רק 11 שנים לאחר מכן; זהו ניסוח מודרני של התוצאה של קנטור – הוא הבין את זה כבנייה ספציפית של מה שהוא קרא לו "קבוצות נגזרות מהמין השני", ועדיין לא הבין את זה כמשהו שאפשר להכליל. משהו נוסף: במהלך הכללה זו של קנטור, הוא הגדיר את הממשיים כהשלמה של הרציונליים לפי סדרות קושי – הוא כנראה היה הראשון לעשות זאת.)

* קבוצה סגורה בת-מנייה היא קבוצת יחידות. **מסקנה:** הקטע הסגור אינו בן-מנייה!

# פרק ב': משפט Salem-Zygmund

## 1. מספרי Pisot-Vijayaraghavan

**הגדרה.** מספר Pisot-Vijayaraghavan (על שם Charles Pisot הצרפתי ו-Tirukkannapuram Vijayaraghavan ההודי) הוא שלם אלגברי  כך שכל צמודי גלואה שלו קטנים בערכם המוחלט מ-.

(תזכורת: שלם אלגברי הינו מספר אלגברי מעל  שהפולינום המינימלי המתוקן שלו מעל  הוא בעל מקדמים שלמים. צמוד גלואה הוא כל שורש אחר של הפולינום המינימלי.)

**דוגמאות.**

* המספרים השלמים הגדולים מ- הם כל מספרי Pisot ממעלה 1.
* יחס הזהב, , הוא מספר Pisot הקטן ביותר ממעלה 2.
* יחס הכסף, , הוא מספר Pisot השני בגודלו ממעלה 2.
* "קבוע הפלסטיק", השורש הממשי של  (), הוא מספר Pisot הקטן ביותר ממעלה כלשהי.

**תכונות של מספרי Pisot (שלא נצטרך, אבל הן סתם מעניינות).**

* בכל הרחבה סופית ממשית של  יש מספר Pisot שמעלתו היא מעלת ההרחבה.
* קבוצת מספרי Pisot סגורה.

אפיון חשוב של מספרי Pisot, שאותו כן נצטרך, הוא זה: **חזקות של מספרי Pisot מתקרבות מהר למספרים שלמים** (או כפולות שלמות של קבוע כלשהו). דוגמה אחת לכך מוכרת לכולם: אם  הוא יחס הזהב ו- צמוד גלואה שלו, אז מתקיימת נוסחת בינה (Binet’s formula):  הוא מספר פיבנואצ'י. אבל , לכן סדרת המספרים מתקרבת ל- בקצב גיאומטרי.

**משפט Pisot (1938).**

לכל  נסמן ב- את המרחק של  מהשלם הקרוב ביותר.

1. יהי  מספר Pisot,  שלם אלגברי. אזי .
2. יהי ,  ו- (תנאי חלש יותר!). אזי  מספר Pisot ו-.

**בעיה פתוחה.**

האם בסעיף 2 אפשר להחליש את התנאי  עוד יותר, לתנאי ?

(התקדמות: אם מוספים לנתונים ש- שלם אלגברי, אז ידוע שכן.)

**הוכחה של סעיף 1.**

נסמן  ו-.

יהי



הפולינום המינימלי של  מעל . ( קבוע.)

, לכן יהי  כך ש-. נסמן .

כעת, לכל , המספר



הוא (לפי אגף ימין) פולינום סימטרי בשורשי  ולכן שייך ל-. מצד שני, הוא שלם אלגברי (לפי אגף שמאל – שלמים אלגבריים סגורים לכפל וחיבור!) ולכן הוא פשוט שלם:



ולכן, אם נבודד את המחובר הראשון, נקבל:



מכיוון ש- לכל , הסכום באגף ימין שואף לאפס כאשר . עבור  מספיק גדול הוא קטן בערך מוחלט מחצי, ואז ה- הופך פשוט ל-:



**מש"ל.**

**הוכחה של סעיף 2.**

אני התלהבתי מההוכחה הזו כי היא עושה שימוש בתורת הפונקציות המרוכבות.

לא נפרט את ההוכחה של מספר למות בסיסיות (אך ממש לא טריוויאליות) שנזדקק להן בדרך.

לכל  נכתוב:



אנו מניחים ש-.

**שלב א – נוכיח ש- היא פונקציה רציונלית.**

לשם כך, נגדיר לכל  את הדטרמיננטה:



ננסה להוכיח שהחל ממקום מסויים, . לשם כך, נחסר מכל טור את  כפול הטור שלפניו, ונקבל:



כאשר:



לכן, לפי אי-שוויון Hadamard (משהו כמו קושי-שוורץ לדטרמיננטות):



הטור הראשון במכפלה הוא "הבעייתי", אבל אל-דאגה – הוא מקיים: , עבור  כלשהו שאינו תלוי ב- (אלא רק ב-). זאת מהגדרת  ומהעובדה שהטור  מתכנס. לכן:



כעת,  (זנב של טור מתכנס), ולכן . אבל כל המספרים המופיעים ב- הם שלמים ולכן  שלם, לכן  החל ממקום מסויים. כלומר, מקדמי הטור  מקיימים נוסחת נסיגה לינארית במקדמים שלמים, ולכן הטור מתכנס לפונקציה רציונלית (הטיעון הזה, שאותו כמובן לא פירטתי באופן פורמלי, נקרא "הלמה של Kronecker", אם כי זו כנראה לא הלמה הכי ידועה שלו).



(נניח ש- לא ניתן לצמצום.) מכיוון ש- שלמים, ניתן להראות ש- עם מקדמים שלמים ו- ("הלמה של Fatou" – שוב, לא הלמה הכי ידועה שלו). נסמן:



**שלב ב – נחקור את הפונקציה .**

בכל נקודה בה הכל מתכנס:

 

אם מסתכלים רק על אגף שמאל, מגלים שרדיוס ההתכנסות של הטור הוא 1 (לפחות). אבל באגף ימין יש נקודה בעייתית שבתוך עיגול היחידה: . לכן הקוטב שם בהכרח מתבטל ע"י , כלומר  וזה שורש פשוט. בנוסף, כל האפסים האחרים של  חייבים להיות לא בתוך עיגול היחידה. הם גם לא יכולים להיות על מעגל היחידה, כי אז היה צריך להיות קוטב על מעגל היחידה באגף שמאל, אבל:



וזו סתירה.

לבסוף, נשתמש בטריק הבא: נהפוך את סדר המקדמים של .



הפולינום האחרון הוא פולינום מתוקן עם מקדמים שלמים אשר  שורש שלו, וכל שאר שורשיו (ב-) הם בעלי ערך מוחלט קטן מ-1. כלומר,  הוא מספר Pisot.

לגבי המסקנה השניה () נקבל אותה בקלות מ-: נסמן  (פירוק ב-), ואז ע"י הכפלה ב- והצבת  נקבל: , כנדרש.

**מש"ל.**

## 2. בניית קבוצת קנטור מוכללת

יהי  ממשי, וקטע סגור  באורך . צעד בנייה אחד הינו מחיקת קטע פתוח מ-, כך שנשארים שני קטעים סגורים: אחד בתחילת  ואחד בסוף , כל אחד באורך .



**קבוצת קנטור המוכללת**  הינה הקבוצה המתקבלת ע"י תהליך אינסופי כזה (כלומר, חיתוך כל צעדי הביניים הנבנים באינדוקציה), כאשר מוסכם שהקטע ההתחלתי הוא .

(כאשר , זוהי קבוצת קנטור "הרגילה".)

**תכונות:**

* הקבוצה  היא ממידה .

זאת מפני שהצעד ה- הוא ממידה , כי .

* הקבוצה  היא סגורה (עפ"י הבניה – חיתוך קבוצות סגורות) ומושלמת (כל נקודה שלה היא נקודת הצטברות שלה).
* הפונקציה



מהווה הומאומורפיזם . בפרט,  אינה בת-מנייה.

**הערה:**

הקבוצה  שאנו מדברים עליה היא מקרה פרטי של הקבוצה , שהיא הקבוצה המתקבלת ע"י השארת  קטעים בכל צעד בנייה עם מיקומים  ביחס לתחילת הקטע, וכאשר בצעד ה- משתמשים ביחס . בהמשך נציין איזה תכונות אפשר להוכיח במקרה הכללי.

## 3. משפט Salem-Zygmund

**משפט (Salem-Zygmund, 1955).**

 היא קבוצת יחידות אם ורק אם  הוא מספר Pisot.

**הערה.** זהו למעשה מקרה פרטי של משפט Salem-Zygmund. במקרה הכללי, שלא ניכנס אליו, מדובר ב-, וצריך להוסיף בסוף "וגם  לכל ".

ההכללה הנוספת, , מהווה בעיה פתוחה עד היום.

המשפט הזה קשה, ובשני הכיוונים נאלץ לוותר על חלק מהפרטים.

### הכיוון הראשון

נתון ש- קבוצת יחידות, וצריך להוכיח ש- הוא מספר Pisot.

האסטרטגיה: תהי  מידת קנטור על  (כך ש-); נרחיב אותה למידה על .

נראה שהיא מקיימת את התכונה הבאה:

אם  אינו מספר Pisot, אז  היא מידת Rajchman. (זו תהיה סתירה, כי כפי שאמרנו בתחילת ההרצאה, אם  קבוצת יחידות סגורה אז מידת Rajchman כלשהי שלה היא אפס.)

#### בניית מידת קנטור

נתבונן בהעתקה



כאמור, זהו הומאומורפיזם בין  ו-.

כעת, תהי  מידת ההסתברות הרגילה על , כלומר מידת ההסתברות המתקבלת ע"י "הטלת מטבע הוגן אינסוף פעמים". אז מידת קנטור, , נבנית ע"י משיכת  לאחור דרך . כלומר, עבור ,



נרחיב את  לכל  ע"י ההגדרה . אזי , וכן לכל ,



#### חישוב מקדמי פורייה של

נחשב את מקדם פורייה :



לכן:



#### הוכחה שאם אינו מספר Pisot אז

(מספיק לקחת  ולא  כי הביטוי לעיל זוגי.)

נוכיח את ה-contrapositive: נניח ש- ונוכיח ש- הוא מספר Pisot.

מכיוון ש- לא שואף לאפס, יש חסם  וסדרה עולה  כך ש-



לכן, ע"י מעבר ממכפלה לסכום בעזרת פיתוח טיילור של , קיים  כך ש-



(כאן גם החלפנו את  ב- השווה לו...)

נתבונן בביטוי בתוך הסינוס, ללא ה-:



עבור  קבוע, כאשר , הביטוי הזה שואף לאפס, ולכן (עד כדי מעבר לתת-סדרה של  כך שהמספר יגדל מספיק בין  ל-) יש סדרה עולה  כך ש-



לפי בולצאנו-ויירשטראס, נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות שהסדרה הנ"ל מתכנסת:



עכשיו קצת קסם שחור עם האינדקסים: נקבע  ונגלה שמתקיים:



לכן, באגף שמאל, ע"י מעבר ל- נקבל:



ואז ע"י מעבר ל- נקבל:



אבל ; לכן, לפי מבחן ההשוואה:



ולפי משפט Pisot,  הוא מספר Pisot.

**מש"ל.**

### הכיוון השני

נתון ש- הוא מספר Pisot, וצריך להוכיח ש- קבוצת יחידות.

הכיוון הזה קשה, ולכן נוכיח רק מקרה פרטי.

לגבי המקרה הכללי, נגיד בסוף בקצרה מה כיוון ההוכחה (הכללה קצת מסובכת של ההוכחה שנציג).

#### מקרה פרטי

נתון ש- הוא מספר שלם, . נוכיח ש- קבוצת יחידות.

**אסטרטגיה.**

נשים לב שלכל  מתקיים



ולכן:



בפרט, אם נבחר בתור  קטע פתוח כלשהו זר ל- (לא קשה למצוא כאלה!), נקבל:



כאשר המכפלה  היא מודולו .

**הגדרה.** קבוצה  תיקרא קבוצת-H (H-set) אם יש סדרה עולה  של טבעיים וקטע פתוח  כך שלכל ,  (כאשר המכפלה  היא מודולו ).

**משפט (Rajchman, 1922).** קבוצת-H היא קבוצת יחידות.

**הוכחה (עם כמה פרטים חסרים).**

תהי  קבוצת-H ויהי  טור המתכנס ל- לכל . נסמן:



תהי  פונקציה חלקה הנתמכת ב-, עם . נסמן ב-.

מכיוון ש- קבוצת-H ביחס ל-, לכל , . מכיוון שהיא חלקה, טור פורייה שלה מתכנס אליה:



אנו רוצים להתבונן במכפלה הפורמלית:



כאשר לכל , הסדרה  היא הקונבולוציה של הסדרה  עם הסדרה .

לשם כך, נשים לב שאוסף הסדרות  מתנהג **כיחידה מקורבת** (במובן קונבולוציה) כאשר :



לכן:

1.  (כי  חלקה), ו- לכל . (חסם אחיד על כולם.)
2.  לכל .
3.  כאשר .

לכן, לפי שיטות הוכחה סטנדרטיות ביחידות מקורבות, נוכל לקבל:

**תרגיל.**



ע"י מעבר מסדרות מקדמים לטורי פונקציות טריגונומטריות, נקבל:

**תרגיל (קשה יותר).**



כעת, לכל :

1. אם  אז לכל ,  ולכן .
2. אם  אז נתון ש- ולכן לכל , .

בסה"כ קיבלנו:



לפי משפט היחידות של קנטור, ; אבל מכיוון ש-, גם .

**מש"ל.**

#### המקרה הכללי

את המקרה הכללי לא נוכיח, אך נסביר את המרכיבים המרכזיים בהוכחה.

**הגדרה.**

* היפר-מישור ב- הוא קבוצה מהצורה  כאשר  ו-.
* קבוצה  (חד-מימדית!) תיקרא **קבוצת-** אם יש תיבה פתוחה  כך שהאוסף



לא מכוסה ע"י מספר סופי של היפר-מישורים ב-.

(איבר במכפלה  הוא מכפלת כל קואורדינאטה של  באיבר קבוע מ-.)

* מקרה פרטי: קבוצה  היא קבוצת- אם ורק אם היא קבוצת-.

**משפט (פיאטצקי-שפירו, 1952).**

כל קבוצת- היא קבוצת יחידות.

**סיפור היסטורי קצר.** איליה פיאטצקי-שפירו היה מתמטיקאי יהודי רוסי שעלה לארץ ב-1976 וקיבל משרה כפרופסור באוניברסיטת תל-אביב. הוא נפטר ב-2009. את המשפט הזה הוא הוכיח בגיל 23, עדיין במהלך התואר הראשון. על המשפט הזה הוא קיבל פרס מה-Moscow Mathematical Society, וזה מפתיע, כי בברית המועצות הייתה אנטישמיות חזקה בתקופה זו.

**משפט (Salem-Zygmund, 1955).**

אם  הוא מספר Pisot כך ש- אז  היא קבוצת-.

בשני המשפטים האלו ההוכחה היא הכללה של מה שראינו (ולא משהו שונה לחלוטין), אבל הפרטים הרבה יותר קשים.

# ביבליוגרפיה

ההרצאה מבוססת בעיקר על הספר הבא, המכיל מידע רב על תחום קבוצות היחידות, אשר ההרצאה רק נגעה בקצהו.

[A. S. Kechris, A. Louveau – Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness](http://www.cambridge.org/gb/knowledge/isbn/item1136422/?site_locale=en_GB)

בסיפורו של קנטור התבססתי על הספר הבא, המומלץ לכל מי שרוצה ללמוד על ההיסטוריה המעניינת.

[J. W. Dauben – Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite](http://press.princeton.edu/titles/4740.html)

את ההוכחה לכיוון הקשה במשפט Pisot לקחתי מהספר הבא.

R. Salem – Algebraic Numbers and Fourier Analysis

מהספר הבא לא לקחתי משהו ספציפי, אבל הוא עזר לי להבין חלק מהחומר ומאוד מומלץ באופן כללי.

[A. Zygmund – Trigonometric Series](http://www.cambridge.org/gb/knowledge/isbn/item6049633/?site_locale=en_GB)